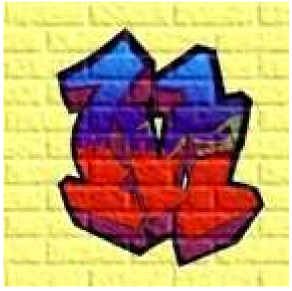
Matemática



4° año secundario



La inversa de una matriz, diferentes métodos de obtención

Vamos a mostrarte algunos de los métodos que te permiten calcular la inversa de una matriz. En cada uno de los métodos te lo mostraremos con una matriz de 2*2 y con otra de 3*3.

Los métodos que estudiaremos son:

- ✓ Por definición
- ✓ Método de Gauss-Jordan
- ✓ Por determinantes
- ✓ Con Excel

1. Método por definición:

Si el producto entre dos matrices resulta la matriz identidad, entonces decimos que las matrices son “inversas”; ya que al multiplicarlas se obtiene el elemento neutro para el producto.

Sea la matriz A, tal que **AB = I_n = BA.** Por ejemplo, consideremos una matriz de 2*2: $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix}$ al multiplicarla por su inversa, obtenemos la matriz identidad.

Es decir,

$$\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 1 & 4 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \rightarrow \begin{cases} 3.a + 2c = 1 \\ 3.b + 2.d = 0 \\ 1.a + 4.c = 0 \\ 1.b + 4.d = 1 \end{cases}$$

Ahora, tenemos que resolver el sistema, es decir debemos encontrar los valores de “*a, b, c y d.*”

Procedamos: primero asociemos las ecuaciones de a dos, juntemos las dos ecuaciones que tienen "*a*" y "*c*";

$\begin{cases} 3.a + 2.c = 1 \\ 1.a + 4.c = 0 \end{cases}$ Despejemos por ejemplo la "*a*" en la primera ecuación:

(1) $\begin{cases} c = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}a \end{cases}$ Y la reemplazamos en la segunda ecuación.

$1.a + 4\left(\frac{1}{2} - \frac{3}{2}a\right) = 0$ Aplicamos propiedad distributiva,

$1.a. + 2 - 6a = 0$ Asociamos y despejamos la "*a*"

$-5a = -2 \rightarrow a = \frac{2}{5}$ obtenido este valor podemos hallar el correspondiente a la "*c*", sustituyendo en **(1):**

$$c = \frac{1}{2} - \frac{3}{2}.\left(\frac{2}{5}\right) \rightarrow c = \frac{1}{2} - \frac{3}{5} \rightarrow c = -\frac{1}{10}$$

En forma análoga trabajemos con las dos ecuaciones que tienen "*b*" y "*d*"

$\begin{cases} 3.b + 2d = 0 \\ 1.b + 4.d = 1 \end{cases} \rightarrow d = -\frac{3b}{2}$ **(*)** $\rightarrow 1.b + 4.\left(-\frac{3b}{2}\right) = 1 \rightarrow 1.b - 6b = 1 \rightarrow -5b = 1$

$\rightarrow b = -\frac{1}{5}$

Valor que nos permite calcular a "*d*" reemplazando en la ecuación marcada por **(*):**

$$d = -\frac{3\left(\frac{-1}{5}\right)}{2} \rightarrow d = \frac{3}{10}$$

En consecuencia, obtuvimos los siguientes valores:

$a = \frac{2}{5}$; $b = -\frac{1}{5}$; $c = -\frac{1}{5}$ y $d = \frac{3}{10}$ que reemplazando:

$$A^{-1} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{bmatrix}$$ **¡es la matriz buscada!**

Te dejamos como actividad "comprobatoria" que realices la multiplicación AxA^{-1}

Ahora trabajemos con una matriz de 3*3: $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix}$

Partimos de la misma hipótesis que en el caso anterior:

Sea la matriz A, tal que $\mathbf{AA^{-1} = I_n = A^{-1}.A}$

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Como se trata de tres incógnitas te sugerimos trabajar de la siguiente manera, primero las tres filas de A con la primera columna de B:

$$\begin{cases} 2.a - 2d + 2g = 1 \\ 2.a + 1d - 0g = 0 \\ 3.a - 2d + 2g = 0 \end{cases} \Rightarrow$$ Asociemos las ecuaciones de a dos, y las restamos para eliminar una de las incógnitas, por ejemplo primera y segunda ecuaciones.

$$\begin{cases} 2a - 2d + 2g = 1 \\ \quad - \\ 2a + 1d = 0 \\ \hline -3d + 2g = 1 \end{cases} \Rightarrow g = \frac{1+3d}{4} \ (*)$$

Asociemos primera y tercera ecuaciones.

$$\begin{cases} 2a - 2d + 2g = 1 \\ - \\ 3a - 2d + 2g = 0 \\ \hline -1a \qquad\qquad = 1 \end{cases} \Rightarrow a = -1$$

Al reemplazar *"a"* en la segunda ecuación podremos calcular "*d*"

$\Rightarrow 2.(-1) + d = 0 \Rightarrow d = 2$

Al reemplazar este último valor obtenido en la ecuación indicada por (*) obtenemos el valor de *"g"*

$$g = \frac{1+3d}{4} = \Rightarrow \frac{1+3.2}{4} \Rightarrow g = \frac{7}{2}$$

Ahora multipliquemos todas las filas de A con la segunda columna de B:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El sistema formado es:

$$\begin{cases} 2b-2e+2h=0 \\ 2b+e=1 \\ 3b-2e+2h=0 \end{cases}$$ ⇒Despejamos la *"e"* de la segunda ecuación $\Rightarrow e=1-2b$

Asociemos primera y tercera ecuación, si las restamos…
$-1b=0 \Rightarrow b=0$, en consecuencia podemos decir que $e=1-2.0 \Rightarrow e=1$

Reemplazando los valores obtenidos en la primera ecuación nos permite calcular la *"h"*
$2.0-2.1+2h=0 \Rightarrow 2h=2 \Rightarrow h=1$

Multipliquemos las tres filas de A por la tercera columna de B:

$$\begin{bmatrix} 2 & -2 & 2 \\ 2 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 \end{bmatrix} * \begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

El sistema formado es:

$$\begin{cases} 2c-2f+2i=0 \\ 2c+f=0 \\ 3c-2f+2i=1 \end{cases}$$ ⇒Despejamos de la segunda ecuación $f=-2c$

Asociamos la primera con la tercera, restándolas
$-1c=-1 \Rightarrow c=1$, en consecuencia $f=2.1=2$
Que reemplazamos en la primera y así podemos calcular *"i"*
$2.1-2.(-2)+2i=0 \Rightarrow 2+4+2i=0 \Rightarrow 2i=-6 \Rightarrow i=-3$

En consecuencia, las incógnitas halladas son:
$a=-1$, *b=0; c=1;d=2;e=1;f=-2;g=7/2;h=1 e i=-3* que reemplazando la matriz inversa quedaría:

$$A^{-1}=\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ \frac{7}{2} & 1 & -3 \end{bmatrix}$$ **¡es la matriz buscada!**

Te dejamos como actividad "comprobatoria" que realices la multiplicación AxA^{-1}

2. Método de Gauss-Jordan:

Los pasos son:

Primero: escribimos la matriz junto a la matriz identidad.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 6 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{array}{c} E_1 \\ E_2 \end{array}$$

Segundo: triangulamos inferiormente la matriz, es decir debemos tratar de que los elementos ubicados en los extremos inferiores izquierdos sean ceros.

Llamemos E_1 a la primera ecuación y E_2 a la segunda. Entonces proponemos multiplicar la primera ecuación por **"5"**, la segunda por **"6"** y luego restarlas, tal como lo hacías en el método de sumas y restas.

Siempre "cruzamos" los coeficientes o números de la primera columna y luego sumamos o restamos, lo que sea necesario para obtener un "0" en la esquina inferior izquierda.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 6 & 1 & 1 & 0 \\ 5 & 3 & 0 & 1 \end{array}\right] \to 5.E_1 - 6.E_2 \to$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 6 & 1 & 1 & 0 \\ 5.6-6.5 & 5.1-6.3 & 5.1-6.0 & 5.0-6.1 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 6 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -13 & 5 & -6 \end{array}\right]$$

Tercero: triangulamos superiormente, en este ejemplo tenemos que transformar en "0" el extremo superior derecho, para esto "cruzamos" los números de la segunda columna:

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 6 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & -13 & 5 & -6 \end{array}\right] \to 13.E_1 + 1.E_2 \to$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 13.6+1.0 & 13.1+1.(-13) & 13.1+1.5 & 13.0+1.(-6) \\ 0 & -13 & 5 & -6 \end{array}\right] = \left[\begin{array}{cc|cc} 78 & 0 & 18 & -6 \\ 0 & -13 & 5 & -6 \end{array}\right]$$

Cuarto: por último hay que convertir la matriz diagonal en la matriz identidad, es decir, en lugar de 78 y -13 debemos tener 1, por esto dividimos la primera ecuación por 78 y la segunda por -13.

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 78 & 0 & 18 & -6 \\ 0 & -13 & 5 & -6 \end{array}\right] \begin{array}{l} :78 \\ :(-13) \end{array} \to \left[\begin{array}{cc|cc} \frac{78}{78} & \frac{0}{78} & \frac{18}{78} & \frac{-6}{78} \\ \frac{0}{-13} & \frac{-13}{-13} & \frac{5}{-13} & \frac{-6}{-13} \end{array}\right] \text{simplificando adecuadamente:}$$

$$\left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{9}{39} & -\frac{1}{13} \\ 0 & 1 & -\frac{5}{13} & \frac{6}{13} \end{array}\right]$$ **¡La matriz de la derecha es la matriz inversa buscada!**

Entonces $A^{-1} = \begin{bmatrix} \frac{3}{13} & -\frac{1}{13} \\ -\frac{5}{13} & \frac{6}{13} \end{bmatrix}$

Te dejamos como actividad "comprobatoria" que realices la multiplicación AxA^{-1}

Ahora te mostramos el cálculo de la inversa con una matriz de 3x3:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 2 & 6 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{bmatrix}$$

Primero: escribimos la matriz junto a la matriz identidad

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 6 & 3 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \begin{matrix} E_1 \\ E_2 \\ E_3 \end{matrix}$$

Segundo: triangulamos inferiormente $\rightarrow 2.E_1 - 3.E_2$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 2.3-3.2 & 2.1-3.6 & 2.(-3)-3.3 & 2.1-3.0 & 2.0-3.1 & 2.0-3.0 \\ 1 & 4 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] =$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & -15 & 2 & -3 & 0 \\ 1 & 4 & -2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$ Ahora con la tercera fila, $\rightarrow 1.E_1 - 3.E_3 \rightarrow$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & -15 & 2 & -3 & 0 \\ 1.3-3.1 & 1.1-3.4 & 1.(-3)-3.(-2) & 1.1-3.0 & 1.0-3.0 & 1.0-3.1 \end{array}\right] =$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & -15 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & -11 & 3 & 1 & 0 & -3 \end{array}\right]$$ Ahora tratemos de convertir en "0" la posición que ocupa el "-11", para lo cual combinamos la E_2 con la E_3 de manera que no perdamos los ceros obtenidos anteriormente. $\rightarrow 11.E_2 + 16.E_3 \rightarrow$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & -15 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 11.(-16)-16.(-11) & 11.(-15)-16.3 & 11.2-16.1 & 11.(-3)-16.0 & 11.0-16.(-3) \end{array}\right] =$$

$$=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & -15 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -213 & 6 & -33 & 48 \end{array}\right]$$

Ahora tenemos que triangular superiormente, pero si prestás atención los coeficientes de la E_3 son múltiplos de 3. Te propongo entonces, dividir todos por el número 3.

Es decir, hacemos E_3:3 →

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & -15 & 2 & -3 & 0 \\ \frac{0}{3} & \frac{0}{3} & \frac{-213}{3} & \frac{6}{3} & \frac{-33}{3} & \frac{48}{3} \end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 3 & 1 & -3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -16 & -15 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -71 & 2 & -11 & 16 \end{array}\right]$$

Triangulemos superiormente, →5.E_1-E_2 →

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 5.3-0 & 5.1-(-16) & 5.(-3)-(-15) & 5.1-2 & 5.0-(-3) & 0 \\ 0 & -16 & -15 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -71 & 2 & -11 & 16 \end{array}\right]=$$

$$=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 15 & 21 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -16 & -15 & 2 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -71 & 2 & -11 & 16 \end{array}\right]$$

Para no perder el "0" de la izquierda en E_2 asociemos E_2 y E_3
71.E_2-15.E_3→

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 15 & 21 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 71.0-15.0 & 71.(-16)-15.0 & 71.(-15)-15.(-71) & 71.2-15.2 & 71.(-3)-15.(-11) & 71.0-15.16 \\ 0 & 0 & -71 & 2 & -11 & 16 \end{array}\right]$$

$$=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 15 & 21 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -1136 & 0 & 112 & -48 & -240 \\ 0 & 0 & -71 & 2 & -11 & 16 \end{array}\right]$$

Si prestás atención, los coeficientes de la E_2 son múltiplos de 4, les propongo entonces, dividir todos por el número 4.

Es decir, hacemos E_2:4 →

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 15 & 21 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ \frac{0}{4} & -\frac{1136}{4} & \frac{0}{4} & \frac{112}{4} & -\frac{48}{4} & -\frac{240}{4} \\ 0 & 0 & -71 & 2 & -11 & 16 \end{array}\right]=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 15 & 21 & 0 & 3 & 3 & 0 \\ 0 & -284 & 0 & 28 & -12 & -60 \\ 0 & 0 & -71 & 2 & -11 & 16 \end{array}\right]=$$

Sólo nos falta convertir en "0" al "21", para ello $284.E_1+21.E_2 \rightarrow$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 284.15+21.0 & 284.21+21.(-284) & 0 & 284.3+21.28 & 284.3+21.(-12) & 284.0+21.(-60) \\ 0 & -284 & 0 & 28 & -12 & -60 \\ 0 & 0 & -71 & 2 & 0-11 & 16 \end{array}\right]$$

$$=\left[\begin{array}{ccc|ccc} 4260 & 0 & 0 & 1440 & 600 & -126 \\ 0 & -284 & 0 & 28 & -12 & -60 \\ 0 & 0 & -71 & 2 & -11 & 16 \end{array}\right]$$

No te desesperes, casi lo logramos; solo nos falta convertir la matriz diagonal que tenemos a la izquierda en la matriz identidad. Entonces simplemente dividimos cada ecuación por el coeficiente a convertir en "1".

Es decir:

E_1:4260
E_2:(-284)
Y E_3:(-71)

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} \frac{4260}{4260} & \frac{0}{4260} & \frac{0}{4260} & \frac{1440}{4260} & \frac{600}{4260} & \frac{-126}{4260} \\ \frac{0}{-284} & \frac{-284}{-284} & \frac{0}{-284} & \frac{28}{-284} & \frac{-12}{-284} & \frac{-60}{-284} \\ \frac{0}{-71} & \frac{0}{-71} & \frac{-71}{-71} & \frac{2}{-71} & \frac{-11}{-71} & \frac{16}{-71} \end{array}\right]$$ = Simplificamos adecuadamente…

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & \frac{24}{71} & \frac{10}{71} & -\frac{21}{71} \\ 0 & 1 & 0 & -\frac{7}{71} & \frac{3}{71} & \frac{15}{71} \\ 0 & 0 & 1 & -\frac{2}{71} & \frac{11}{71} & -\frac{16}{71} \end{array}\right]$$ **¡La matriz de la derecha es la matriz inversa buscada!**

Decimos entonces que $A^{-1}=\left[\begin{array}{|ccc} \frac{24}{71} & \frac{10}{71} & -\frac{21}{71} \\ -\frac{7}{71} & \frac{3}{71} & \frac{15}{71} \\ -\frac{2}{71} & \frac{11}{71} & -\frac{16}{71} \end{array}\right]$

3. Método por determinantes.

Aplicando este método decimos que $A^{-1}=\frac{adj(A)^t}{\det(A)}$, donde ***adj(A)**^{t}* es la matriz de los adjuntos, que explicaremos en las próximas páginas y ***det(A)*** es el determinante de la matriz A. Te contamos algunos detalles del **"determinante".**

El origen del ***determinante*** o de volumen *orientado* fue introducido para estudiar el número de soluciones de los sistemas lineales de ecuaciones.

Para el cálculo de determinantes de matrices de cualquier orden, existe una regla recursiva (teorema de Laplace) que reduce el cálculo a sumas y restas de varios determinantes de un orden inferior.

Determinante de orden 2

Los **determinantes** de una matriz de orden 2 como $A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ se calculan con la siguiente fórmula:

$$\det(A)=a_{11}xa_{22} - a_{12}xa_{21}$$

Veamos un ejemplo:

Sea la matriz $A=\begin{pmatrix} 8 & 1 \\ -3 & 6 \end{pmatrix}$ → det (A)= 8 x 6 – (-3) x 1= 48 + 3 = 51

Determinante de orden 3

Un determinante de orden 3 para la matriz $M=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$ se calcula mediante la **regla de Sarrus:**

Paso 1: escribimos los coeficientes en el mismo orden en que están en la matriz y repetimos las dos primeras filas:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = \begin{matrix} \\ \\ \\ a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{matrix}$$

$$(a_{11}a_{22}a_{33}+a_{21}a_{32}a_{13}+a_{31}a_{12}a_{23})$$

$$-$$

$$(a_{31}a_{32}a_{13}+a_{11}a_{32}a_{23}+a_{21}a_{12}a_{33})$$

Veamos un ejemplo para tratar de aclarar el mecanismo usando números, de manera que te marees lo menos posible:

Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 8\\ 2 & 2 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$

Para encontrar el determinante mediante la regla de Sarrus los pasos son:

Escribimos los coeficientes, para no confundir con la matriz se colocan entre barras, repitiendo las dos primeras filas, y luego los productos siguiendo las flechas fucsias y restando las líneas verdes:

$$\begin{array}{|ccc|}1 & -3 & 8\\ 2 & 2 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{array}\\ \begin{array}{ccc}1 & -3 & 8\\ 2 & 2 & 2\end{array} =(1.2.(-1)+2.1.8+0.(-3).2) - (8.2.0+2.1.1+(-1).(-3).2)=$$

$$= (-2+16+0) - (0+2+6) = \mathbf{14} - \mathbf{12} = \mathbf{2\ es\ det(A)}$$

Para poder aplicar la fórmula del comienzo necesitamos aprender a calcular la matriz adjunta, veamos un método para obtenerla:

Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}a_{11} & a_{12} & a_{13}\\ a_{21} & a_{22} & a_{23}\\ a_{31} & a_{32} & a_{33}\end{pmatrix}$ su adjunta está formada por los determinantes que resultan al suprimir fila y columna de cada uno de los elementos.

Por ejemplo la posición del elemento a_{32} quedaría ocupada por el determinante que resulte al eliminar la terca fila y la segunda columna o sea $\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{21} & a_{23}\end{vmatrix}$ y como la fila +columna 3+2 es impar le cambiamos el signo.

Te mostramos como quedaría la matriz adjunta en forma genérica, lo que seguramente aclarará lo anterior. Hemos indicado con círculos azules los determinantes a los que se debe cambiar el signo.

$$aadjA=\begin{pmatrix}+\begin{vmatrix}a_{22} & a_{23}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}a_{21} & a_{23}\\ a_{31} & a_{31}\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}a_{21} & a_{22}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{32} & a_{33}\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{31} & a_{33}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}a_{12} & a_{13}\\ a_{22} & a_{23}\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}a_{11} & a_{13}\\ a_{21} & a_{23}\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

Por ejemplo:

Sea la matriz $A=\begin{pmatrix}-1 & 1 & 2\\ 1 & -2 & -4\\ 1 & -2 & -3\end{pmatrix}$ armamos la matriz con los determinantes, si te resulta más sencilla podrías calcularlos a parte y luego colocar sus

resultados en la matriz:

$$adjA=\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix}-2 & -4\\ -2 & -3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & -4\\ 1 & -3\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & -2\\ 1 & -2\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & -3\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & -3\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & -3\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}1 & 2\\ -2 & -4\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}-1 & 2\\ 1 & -3\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 1 & -2\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

Resolviendo los determinantes sería $adj(A)=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 0\\ -1 & 1 & -2\\ 0 & -1 & 1\end{pmatrix}$ y la traspuesta

resulta $\Rightarrow adj(A)^t=\begin{pmatrix}-2 & -1 & 0\\ -1 & 1 & -1\\ 0 & -2 & 1\end{pmatrix}$

Ahora, que sabemos calcular el determinante y la matriz adjunta estamos en condiciones de determinar la inversa con la fórmula $A^{-1}=\dfrac{adj(A)^t}{\det(A)}$,

Sea $A=\begin{pmatrix}8 & 1\\ -3 & 6\end{pmatrix}$, su det(A)=51 y la adj(A)= $A=\begin{pmatrix}6 & +3\\ -1 & 8\end{pmatrix}\Rightarrow adj(A)^t=\begin{pmatrix}6 & -1\\ 3 & 8\end{pmatrix}$

$A^{-1}=\dfrac{\begin{pmatrix}6 & -1\\ 3 & 8\end{pmatrix}}{51}=\begin{pmatrix}\frac{6}{51} & -\frac{1}{51}\\ \frac{3}{51} & \frac{8}{51}\end{pmatrix}$ que simplificando queda como $\begin{pmatrix}\frac{2}{17} & -\frac{1}{51}\\ \frac{1}{17} & \frac{8}{51}\end{pmatrix}$

Sea $A=\begin{pmatrix}1 & -3 & 8\\ 2 & 2 & 2\\ 0 & 1 & -1\end{pmatrix}$ y su det(A)=2, la adjunta la calculamos siguiendo las instrucciones; es decir

$$adj(A)=\begin{pmatrix} +\begin{vmatrix}2 & 2\\ 1 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}2 & 2\\ 0 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}2 & 2\\ 0 & 1\end{vmatrix}\\ -\begin{vmatrix}-3 & 8\\ 1 & -1\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & 8\\ 0 & -1\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & -3\\ 0 & 1\end{vmatrix}\\ +\begin{vmatrix}-3 & 8\\ 2 & 2\end{vmatrix} & -\begin{vmatrix}1 & 8\\ 2 & 2\end{vmatrix} & +\begin{vmatrix}1 & -3\\ 2 & 2\end{vmatrix}\end{pmatrix}$$

$$adj(A)=\begin{pmatrix}-4 & +2 & 2\\ +5 & -1 & 1\\ -22 & +4 & 8\end{pmatrix}\Rightarrow A^{-1}=\frac{adj(A)^t}{\det(A)}=\frac{\begin{pmatrix}-4 & +5 & -22\\ +2 & -1 & 4\\ 2 & 1 & 8\end{pmatrix}}{2}$$

que distribuimos en la matriz y simplificamos para obtener finalmente la inversa:

$$A^{-1}=\begin{pmatrix}-2 & -\frac{5}{2} & -11\\ 1 & \frac{-1}{2} & 2\\ 1 & \frac{1}{2} & 4\end{pmatrix}$$

¡Finalmente lo logramos!

Actividades

Actividad 1

a. Calculá la inversa de cada una de las matrices usadas en el método por definición utilizando el método de Gauss-Jordan.

b. Calculá la inversa de cada una de las matrices usadas en el método de Gauss-Jordan, utilizando el método por definición.

c. Calculá la inversa de cada una de las matrices usadas en el método de Gauss-Jordan utilizando el método de determinantes.

Actividad 2

a. Calculá el determinante de las siguientes matrices cuadradas:

$$A=\begin{pmatrix}8 & -3\\ 1 & 0\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 5 & -5\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 6 & 5\\ 9 & 2 & -8\end{pmatrix}\qquad E=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -1\\ 1 & 2 & 3\\ 6 & -8 & 0\end{pmatrix}$$

Actividad 3

a. Determiná la matriz adjunta de las siguientes matrices cuadradas:

$$F = \begin{pmatrix} 8 & 9 \\ 1 & 5 \end{pmatrix} \qquad G = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 8 \\ 11 & 5 & -2 \\ -3 & 7 & 1 \end{pmatrix} \qquad H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$$

Actividad 4

Determiná la inversa de las matrices A, C, D, F y G utilizando $A^{-1} = \frac{adj(A)^t}{\det(A)}$,

En el próximo encuentro te mostraremos aplicaciones de las matrices a problemas diferentes.

Actividad 5

Indicá cuáles de las matrices anteriores no es inversible y porqué.

Actividad 6

Verificá todos tus resultados utilizando Excel.

CLAVE DE LAS ACTIVIDADES

Encuentro 5

Actividad 1

Los siguientes desarrollos no son únicos, es decir quizás a vos se te ocurrieron combinaciones diferentes a las mías; sin embargo los resultados finales, las inversas buscadas son únicas.

1.a.1) $\left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right] \to E_1 - 3E_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 3 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & -10 & 1 & -3 \end{array}\right] \to 5E_1 + E_2 \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 15 & 0 & 6 & -3 \\ 0 & -10 & 1 & -3 \end{array}\right] \to$

$\begin{array}{l} E_1 : 15 \\ E_2 : -10 \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ 0 & 1 & -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{array}\right] \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{2}{5} & -\frac{1}{5} \\ -\frac{1}{10} & \frac{3}{10} \end{pmatrix}$

1.a.2) $\left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 3 & -2 & 2 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] \to \begin{array}{c} E_1 - E_2 \\ 3E_1 - 2E3 \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 & 3 & 0 & -2 \end{array}\right] \to 2E_2 - 3E_3$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & -2 & 2 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -3 & 2 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 & -7 & -2 & 6 \end{array}\right] \to \begin{array}{c} E_1 - E_2 \\ E_2 + E_3 \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 0 & -6 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & -7 & -2 & 6 \end{array}\right] \to 3E_1 + E_2$

$\Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 6 & 0 & 0 & -6 & 0 & 6 \\ 0 & -3 & 0 & -6 & -3 & 6 \\ 0 & 0 & -2 & -7 & -2 & 6 \end{array}\right] \to \begin{array}{l} E_1 : 6 \\ E_2 : (-3) \\ E_3 : (-2) \end{array} \Rightarrow \left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 2 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{7}{2} & 1 & -3 \end{array}\right] \Rightarrow$

$A^{-1} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -2 \\ \frac{7}{2} & 1 & -3 \end{pmatrix}$

1.b.1) $\begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 5 & 3 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Primero armamos las ecuaciones donde juegan a y c:

$\begin{matrix} 6.a+1.c=1 \\ 5.a+3c=0 \end{matrix}$ ⇒despejamos "a" de la segunda ecuación $5a=-3c \Rightarrow a=-\frac{3}{5}c$ que sustituyendo en la primera ecuación, resulta $6.\left(-\frac{3}{5}c\right)+c=1 \Rightarrow -\frac{18}{5}c+c=1 \Rightarrow$

$-\frac{13}{5}c=1 \Rightarrow c=-\frac{5}{13} \quad \therefore a=-\frac{3}{5}\left(\frac{-5}{13}\right) \Rightarrow a=\frac{3}{13}$

Ahora, nos dedicamos a las otras incógnitas, b y d:

$\begin{matrix} 6b+1d=0 \\ 5.b+3d=1 \end{matrix} \Rightarrow -6b=d \Rightarrow 5b+3.(-6b)=1 \Rightarrow 5b-18b=1 \Rightarrow -13b=1 \Rightarrow b=-\frac{1}{13}$

$\therefore d=-6.\left(-\frac{1}{13}\right) \Rightarrow d=\frac{6}{13}$

Por lo tanto $A^{-1}=\begin{pmatrix} \frac{3}{13} & -\frac{1}{13} \\ -\frac{5}{13} & \frac{6}{13} \end{pmatrix}$

1.b.2) $\begin{pmatrix} 3 & 1 & -3 \\ 2 & 6 & 3 \\ 1 & 4 & -2 \end{pmatrix} * \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

$\begin{matrix} 3a+1d-3g=1 \\ 2a+6d+3g=0 \\ 1a+4d-2g=0 \end{matrix} \Rightarrow$ sumando primera + segunda ecuación: $\underline{5a+7d=1}$

y $\begin{matrix} 2.E_2=4a+12d+6g=0 \\ 3E_3=3a+12d-6g=0 \end{matrix} \Rightarrow \underline{7a+24d=0}$

<u>Juntemos las ecuaciones subrayadas:</u> $\begin{matrix} 5a+7d=1 \\ 7a+24d=0 \end{matrix}$

$\Rightarrow 5\left(-\frac{24}{7}d\right)+7d=1 \Rightarrow -\frac{120}{7}d+17d=1 \Rightarrow -\frac{71}{7}d=1 \Rightarrow d=-\frac{7}{71}$

$\Rightarrow a=-\frac{24}{7}\left(-\frac{7}{71}\right) \Rightarrow a=\frac{24}{71}$

$\Rightarrow 1.\frac{24}{71}+4\left(-\frac{7}{71}\right)-2g=0 \Rightarrow \frac{24}{71}-\frac{28}{71}=2g \Rightarrow g=-\frac{2}{71}$

$\begin{matrix} 3b+1e-3h=0 \\ 2b+6e+3h=1 \\ 1b+4e-2h=0 \end{matrix} \Rightarrow$ sumando primera + segunda ecuación $\underline{5b+7e=1}$

Y $\begin{matrix} 2.E_2 = 4b + 12e + 6h = 2 \\ 3E_3 = 3b + 12e - 6h = 0 \end{matrix}$ las sumamos miembro a miembro: $\underline{7b + 24e = 2}$

Juntemos las ecuaciones subrayadas: $\begin{matrix} 5b + 7e = 1 \\ 7b + 24e = 2 \end{matrix}$

$\Rightarrow b = \frac{1-7e}{5}$ reemplazando en la segunda : $7.\left(\frac{1-7e}{5}\right) + 24e = 2$

$\Rightarrow \frac{7+24e}{5} - \frac{49}{5}e = 2 \Rightarrow \frac{71}{5}e = 2 - \frac{7}{5} \Rightarrow e = \frac{3}{71}$

$\Rightarrow b = \frac{1 - 7\left(\frac{3}{71}\right)}{5} \Rightarrow b = \frac{10}{71}$

$\Rightarrow \frac{10}{7} + 4\frac{3}{71} - 2h = 0 \Rightarrow h = \frac{11}{71}$

$3c + 1f - 3i = 0$

$2c + 6f + 3i = 0 \Rightarrow$ sumando primera + segunda ecuación $\underline{5c + 7f = 0}$

$1c + 4f - 2i = 1$

Y $\begin{matrix} 2.E_2 = 4c + 12f + 6i = 0 \\ 3E_3 = 3c + 12f - 6i = 3 \end{matrix}$ las sumamos miembro a miembro: $\underline{7c + 24f = 3}$

Juntemos las ecuaciones subrayadas: $\begin{matrix} 5c + 7f = 0 \\ 7c + 24f = 3 \end{matrix}$

$\Rightarrow c = -\frac{7}{5}f$ que reemplazamos en la segunda ecuación

$\Rightarrow 7.\left(-\frac{7}{5}f\right) + 24f = 3 \Rightarrow f = \frac{15}{71}$

$\Rightarrow c = -\frac{7}{5}.\frac{15}{71} \Rightarrow c = -\frac{21}{71}$

$\Rightarrow 3.\left(-\frac{21}{71}\right) + \frac{15}{71} - 3i = 0 \Rightarrow i = -\frac{16}{71}$

Por lo tanto $A^{-1} = \begin{pmatrix} \frac{24}{71} & \frac{10}{71} & -\frac{21}{71} \\ -\frac{7}{71} & \frac{3}{71} & \frac{15}{71} \\ -\frac{2}{71} & \frac{11}{71} & -\frac{16}{71} \end{pmatrix}$

c. Calculá la inversa de cada una de las matrices usadas en el método de Gauss-Jordan utilizando el método de determinantes.

Actividad 2

a. Calcula el determinante de las siguientes matrices cuadradas:

$$A=\begin{pmatrix}8 & -3\\ 1 & 0\end{pmatrix}\qquad B=\begin{pmatrix}2 & -2\\ 5 & -5\end{pmatrix}\qquad C=\begin{pmatrix}6 & 0\\ 3 & -1\end{pmatrix}$$

$$D=\begin{pmatrix}1 & 2 & 3\\ 0 & 6 & 5\\ 9 & 2 & -8\end{pmatrix}\qquad E=\begin{pmatrix}-1 & -2 & -1\\ 1 & 2 & 3\\ 6 & -8 & 0\end{pmatrix}$$

Actividad 3

a. Determinar la matriz adjunta de las siguientes matrices cuadradas:

$$F=\begin{pmatrix}8 & 9\\ 1 & 5\end{pmatrix}\qquad G=\begin{pmatrix}1 & 0 & 8\\ 11 & 5 & -2\\ -3 & 7 & 1\end{pmatrix}\qquad H=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 1 & 1\end{pmatrix}$$

Actividad 4

Determinar la inversa de las matrices A, C, D, F y G utilizando $A^{-1}=\dfrac{adj(A)^t}{\det(A)}$,

En el próximo encuentro te mostraremos aplicaciones de las matrices a problemas diferentes.

Actividad 5

Indicá cuáles de las matrices anteriores no es inversible y porqué.

Actividad 6

Verificá todos tus resultados utilizando Excel.